10. cvičení - teorie

Věta 3.27. Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Věta 3.22 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jeslitže existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Věta 3.25 (Vztah znaménka derivace a monotonie funkce)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Necht' f je spojitá na J a v každém vnitřním boďe J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.

Definice. Funkce f je *konvexní*, pokud má v každém bodě tečnu pod grafem. (např. funkce $y = x^2$ je konvexní)

Funkce f je *konkávní*, pokud má v každém bodě tečnu nad grafem. (např. funkce $y = -x^2$ je konkávní)

Věta 3.31 (druhá derivace a konvexita)**.** Nechť $a, b \in R^*, a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

(i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).

(iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).

(iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).

Definice. Bod je *inflexní*, pokud se v něm mění konvexita v konkávnost či naopak.

Věta 3.28 (nutná podmínka pro inflexi)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ *asymptotu* $ax + b$, pokud $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Analogicky definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 3.32 (Tvar asymptoty)**.** Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b \in R$. Analogické tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Na druhé straně postup.

Postup vyšetřování průběhu funkce (dle doc. Zeleného):

1. Určíme **definiční obor** a obor **spojitost**i funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: **lichost**, **sudost**, **periodicita**.
3. Dopočítáme **limity v „krajních bodech** definičního oboru“.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly **monotonie** a nalezneme lokální a globální **extrémy**. Určíme obor hodnot. (Věta 3.25, Věta 3.22)
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, na kterých funkce **konvexní/konkávní**. (Věta 3.31)
6. Vypočteme **asymptoty** funkce. (Věta 3.32)
7. Načrtneme **graf** funkce.